LES POSSIBILITATS DE FER DIANA AMB TRAJECTÒRIES A L'ATZAR

M. Sanz-Solé, Universitat de Barcelona
http://www.mat.ub.es/~sanz

Conferència a la SCM
11 de novembre de 2009

Introducció

Per l'estudi de l'evolució de fenomens podem optar per:

- Marc determinista
  $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, solució d'una EDO (o d'una EDP).
  Es visita el conjunt $A \subset \mathbb{R}$? Resposta obvia:

$$f(\mathbb{R}_+) \cap A \begin{cases} \neq \emptyset, \\ = \emptyset. \end{cases}$$

- Marc aleatori
  Equacions diferencials (o en derivades parcials) estocàstiques.
  Solucions: Processos estocàstics $v : \Omega \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$.
  Quines trajectòries tenen intersecció efectiva amb el conjunt A?

$$\{\omega \in \Omega : v(\omega, \mathbb{R}_+) \cap A \neq \emptyset\}.$$

És molt (poc) freqüent? Probabilitats d'aquests conjunts.

Formulació del problema

- $V = \{v(x), x \in \mathbb{R}^m\}$, procés estocàstic a valors en $\mathbb{R}^d$,
- $I \subset \mathbb{R}^m$, compacte, mesura de Lebesgue positiva.

Definim
$$v(I) := \{v(x), x \in I\}.$$

- Què podem dir de $P\{v(I) \cap A \neq \emptyset\}$? $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.
- Caracterització dels conjunts A dits polars:
$$P\{v(I) \cap A \neq \emptyset\} = 0.$$

Cotes superiors i inferiors en termes de la capacitat o de la mesura de Hausdorff de A.

Motivacions

- Anàlisi de la recurrència i la transitorietat
  Un punt $x \in \mathbb{R}^d$ és recurrent per a v si, per a qualsevol $\varepsilon > 0$,

$$\{t \geq 0 : |v(t) - x| \leq \varepsilon\}$$

  no és acotat, q.s.
- Teoria probabilista del potencial
  Estudi de les solucions de l'equació de Laplace.
- Mecànica estadística
- ...

Capacitat de Bessel-Riesz

El nucli. Per $\beta, r \in \mathbb{R}$, definim

$$K_\beta(r) = \begin{cases} r^{-\beta}, & \text{if } \beta > 0, \\ \log_+\left(\frac{1}{r}\right), & \text{if } \beta = 0, \\ 1, & \text{if } \beta < 0. \end{cases}$$

L'energia. $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, μ probabilitat en E:

$$I_\beta(\mu) = \int_E \int_E K_\beta(\|x-y\|)\mu(dx)\mu(dy).$$

La capacitat d'E és:

$$\mathrm{Cap}_\beta(E) = \left[\inf_{\mu \in \mathcal{P}(E)} I_\beta(\mu)\right]^{-1}.$$

Mesura de Hausdorff

Per $\beta \in [0, \infty[$, $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$:

$$\mathcal{H}_\beta(E) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (2r_i)^\beta : E \subset \cup_{i=1}^{\infty} B_{r_i}(x_i), \sup_{i \geq 1} r_i \leq \varepsilon \right\}.$$

Per $\beta \in]-\infty, 0[$, $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$:

$$\mathcal{H}_\beta(E) = \infty.$$

Una relació important entre capacitats i mesures de Hausdorff

Per $\beta_1 > \beta_2 > 0$ i E compacte,

$$\mathrm{Cap}_{\beta_1}(E) > 0 \Longrightarrow \mathcal{H}_{\beta_1}(E) > 0 \Longrightarrow \mathrm{Cap}_{\beta_2}(E) > 0$$

(teorema de Frostman).

Un primer exemple: El moviment brownià

$\{B_t = (B_t^1, \ldots, B_t^d), t \in \mathbb{R}_+\}$ procés gaussià, components independents,

- $E(B_t^i) = 0$,
- $E(B_t^i B_s^i) = s \wedge t$.

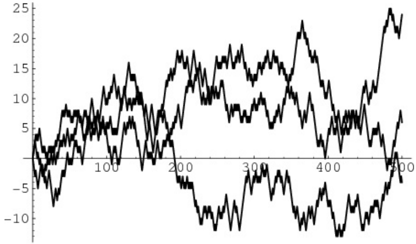

Figura: Trajectòries del moviment brownià ($d = 1$)

Kakutani (1944), Dvoretzky (1950)

Pel moviment brownià d-dimensional,

$$P(B(\mathbb{R}_+) \cap A \neq \emptyset) > 0 \iff \mathrm{Cap}_{d-2}(A) > 0.$$

En particular,

$$P(\exists t : B(t) = x) > 0 \iff d = 1.$$

En efecte,

$$\mathrm{Cap}_\beta(\{x\}) = \begin{cases} 1, & \beta < 0, \\ 0, & \beta \geq 0. \end{cases}$$

- La demostració utilitza conceptes i resultats de la teoria de processos de Markov (semigrup, resolvent, potencial de densitat...)
- Per què surt la capacitat de Bessel-Riesz?
  Per $d \geq 3$, es té

$$\frac{C_1}{\|y-x\|^{d-2}} \leq r_1(x,y) \leq \frac{C_2}{\|y-x\|^{d-2}},$$

on

$$r_1(x,y) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_0^\infty e^{-t} t^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{\|y-x\|^2}{2t}\right) dt.$$

... I molt més

- Processos de Markov: *Blumenthal, Getoor*, 1968; *Fitzsimmons, Salisbury*, 1989; *Hirsch, Song*, 1995
- Processos de Lévy: *Bertoin*, 1996
- Super-processos: *Perkins*, 1990; *Dynkin*, 1991; *Le Gall*, 1994
- Camps aleatoris gaussians no estacionaris: *Y. Xiao*, 2007
- ...

Algunes monografies: *Doob*, 1984; *Khoshnevisan* 2000.

Un segon exemple: El moviment brownià multiparamètric

$\left\{W_{t_1,\dots,t_m} = \left(W^1_{t_1,\dots,t_m}, \dots, W^d_{t_1,\dots,t_m}\right), (t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{R}^m_+\right\}$,

gaussià, components independents, centrat,

$$E\left(W^i_{t_1,\dots,t_m} W^i_{s_1,\dots,s_m}\right) = (t_1 \wedge s_1) \cdots (t_m \wedge s_m).$$

Khoshnevisan, Shi, 1999:

$$c^{-1}\mathrm{Cap}_{d-2m}(A) \le P\{v(I) \cap A \ne \emptyset\} \le c\,\mathrm{Cap}_{d-2m}(A).$$

Observacions

- Extensió del resultat de Kakutani i Dvoretzsky.
- Utilització del càlcul de Cairoli i Walsh.

Un sistema d'EDPEs hiperbòlic

Extensió del brownià multiparamètric, $m = 2$ (Cairoli, Walsh, ...)

$$
\begin{aligned}
\partial^2_{t_1,t_2} u_i(t) &= b^i(u(t)) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{d} \sigma^i_j(u(t)) \partial^2_{t_1,t_2} W^j_{t_1,t_2}, \qquad t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2_+, \\
u_i(t) &= x_0, \qquad t_1 t_2 = 0,
\end{aligned}
$$

$i = 1, \ldots, d$.

R. Dalang, E. Nualart, 2004:

$$c^{-1} \mathrm{Cap}_{d-4}(A) \leq P\{u(I) \cap A \neq \emptyset\} \leq c\,\mathrm{Cap}_{d-4}(A).$$

Ingredients bàsics per l'extensió

- Propietats de la densitat de la solució $u(t_1, t_2)$ obtingudes utilitzant Càlcul de Malliavin (*D. Nualart, S.-S.*, 1985; *Kohatsu-Higa*, 2003).
- Desigualtats per martingales amb paràmetre bidimensional.

En general, podem esperar:

- Cotes superiors en termes de la mesura de Hausdorff.
- Cotes inferiors en termes de la capacitat de Bessel-Riesz.

Criteris per acotacions de les probabilitats de fer diana

R. C. Dalang, M. Sanz-Solé

arXiv: 0902.4583v1 [math.PR]

Cota inferior

Teorema 1. Suposem:

1. Per tot $x, y \in \mathbb{R}^m$, $x \neq y$, el vector $(v(x), v(y))$ té densitat $p_{x,y}$, i existeixen $\gamma, \alpha \in]0, \infty[$ tals que
$$p_{x,y}(z_1, z_2) \leq C \frac{1}{\|x - y\|^{\gamma}} \exp\left(-\frac{\|z_1 - z_2\|^2}{\|x - y\|^{\alpha}}\right),$$
per tots $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^d$.
2. La densitat p_x de $v(x)$ satisfà $\inf_{w \in K} p_x(w) > 0$, per tot conjunt compacte $K \subset \mathbb{R}^d$.

Aleshores, per tot $A \subset [-N, N]^d$, existeix $c > 0$ tal que
$$P\{v(I) \cap A \neq \emptyset\} \geq c\mathrm{Cap}_{\frac{2}{\alpha}(\gamma - m)}(A).$$

Per què?

$$P\{v(I)\cap A^{\varepsilon}\neq\emptyset\}\geq P\{J_{\varepsilon}(\mu)>0\}\geq\frac{[EJ_{\varepsilon}(\mu)]^2}{E(J_{\varepsilon}(\mu))^2},$$

on

$$J_{\varepsilon}(\mu)=\frac{1}{(2\varepsilon)^d}\int_I dx\int_A\mu(dz)\mathbf{1}_{B_{\varepsilon}(0)}\left(v(x)-z\right).$$

- La cota inferior per $E(J_{\varepsilon}(\mu))$ surt de la hipòtesi 2.
- La cota superior per $E(J_{\varepsilon}(\mu))^2$ surt de la hipòtesi 1 i de

$$\int_I dx\int_I dy\frac{\exp\left(-\frac{a^2}{\|x-y\|^{\alpha}}\right)}{\|x-y\|^{\gamma}}\leq CK_{\frac{2}{\alpha}(\gamma-m)}(a).$$

Cota superior

Considerem

- Rectangles petits (per recobrir I):

$$R_j^{\varepsilon} = \prod_{l=1}^{m} \left[j_l \varepsilon^{\frac{1}{\delta}}, (j_l + 1)\varepsilon^{\frac{1}{\delta}} \right],$$

$\delta > 0$, $\varepsilon \in [0, 1[$, $j_1, \ldots, j_m \in \mathbb{Z}$, and $j = (j_1, \ldots, j_m)$.

- Boles petites $B_\varepsilon(z)$, $z \in A$ (per recobrir A).

Idea: Per un argument de recobriment, una cota superior per $P\{v(I) \cap A \neq \emptyset\}$ pot obtenir-se a partir de la mida en ε de

$$P\left\{v(R_j^{\varepsilon}) \cap B_\varepsilon(z) \neq \emptyset\right\}$$

(micro-control).

Proposició.

Fixem $\theta > 0$, $\varepsilon \in]0,1[$ i $D \subset \mathbb{R}^d$.
Suposem que per $R_j^\varepsilon \cap I \neq \emptyset$ i $z \in D$,

$$P\left\{v(R_j^\varepsilon) \cap B_\varepsilon(z) \neq \emptyset\right\} \leq c\varepsilon^\theta.$$

Aleshores per tot borelià $A \subset D$

$$P\left\{v(I) \cap A \neq \emptyset\right\} \leq C\mathcal{H}_{\theta - \frac{m}{\delta}}(A).$$

Una condició suficient pel micro-control

Teorema 2. Fixem $D \subset \mathbb{R}^n$ i suposem:

1. Per tot $x \in \mathbb{R}^m$, $v(x)$ té densitat p_x, i
$$\sup_{z \in D^{(2)}} \sup_{x \in I^{(1)}} p_x(z) \leq C.$$
2. Existeix $\delta \in]0,1]$ tal que per tot $q \in [1, \infty[$, $x, y \in I^{(1)}$,
$$E\left(\|v(x) - v(y)\|^q\right) \leq C\|x - y\|^{q\delta}.$$

Aleshores per tot $\theta \in]0, d[$,

$$P\left\{v(R_j^\varepsilon) \cap B_\varepsilon(z) \neq \emptyset\right\} \leq c\varepsilon^\theta.$$

Per tant,

$$P\left\{v(I) \cap A \neq \emptyset\right\} \leq C\mathcal{H}_{\theta - \frac{m}{\delta}}(A).$$

Resumint

- Les cotes inferiors en funció de la capacitat d'A s'obtenen suposant:
  1. Les densitats conjuntes de $(v(x), v(y))$ tenen fites de tipus *gaussià*.
  2. La dentitat $v(x)$ és estrictament positiva en compactes.
- Les cotes superiors en termes de la mesura de Hausdorff s'obtenen suposant:
  1. La densitat de $v(x)$ és uniformement acotada sobre compactes.
  2. $E\left(\|v(x) - v(y)\|^q\right) \leq C\|x - y\|^{q\delta}$.
- Per un cert tipus de processos gaussians, la cota superior es pot millorar lleugerament ($\theta \in]0, d]$).

Exemple d'aplicació

Un sistema d'equacions estocàstiques d'ones

$$\mathcal{L}(u_i)(t,x) := \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}(t,x) - \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}(t,x)$$
$$= b_i(u(t,x)) + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}(u(t,x))\dot{W}^j(t,x),$$

$1 \le i \le d$, $t \in]0,T]$, $x \in \mathbb{R}^k$, $k \ge 2$, condicions inicials nul.les, $b_i, \sigma_{ij} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz contínues.

- $k = 2$: *Dalang, Frangos*, 1998; *Dalang*, 1999, *Millet, S.-S.*, 1999.
- $k = 3$: *Dalang*, 1999; *Peszat, Zabczyk*, 2000; *Dalang, S.-S.*, 2009.
- $k \ge 1$: *Peszat*, 2002, *Conus, Dalang*, 2008.

Descripció de la pertorbació aleatòria

$\dot{W}(t,x)$ soroll d-dimensional, components independents, blanc en temps i correlacionat en espai, amb covariància estacionària:

$W = \big(W(\psi),\ \psi \in \mathcal{D}(]0,\infty[\times\mathbb{R}^d)\big)$ gaussià, $E(W(\psi)) = 0$,

Covariància:

$$
\begin{aligned}
E\big(W(\psi_1)W(\psi_2)\big) &= \int_{\mathbb{R}_+} ds \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma(dx)(\psi_1(s) * \tilde{\psi}_2(s))(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} ds \int_{\mathbb{R}^d} \mu(d\xi)\mathcal{F}\psi_1(s)(\xi)\overline{\mathcal{F}\psi_2(s)(\xi)}.
\end{aligned}
$$

Exemple

$\Gamma(dx) = |x|^{-\beta}dx$,
$\mu(dx) = |x|^{-(k-\beta)}dx$.

Situació particular: El cas gaussià

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}(t,x) - \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}(t,x) = \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij} \dot{W}^j(t,x),$$

$i = 1, \ldots, d$, $t \in]0, T]$, $x \in \mathbb{R}^k$, condicions inicials nul.les.

Solució:

$$u_i(t,x) = \sum_{j=1}^{d} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^k} G(t-r, x-y) \sigma_{ij} W^j(dr, dy)$$

$i = 1, \ldots, d$, $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}^k$.

- $G(t, \cdot)$ és la solució fonamental de l'equació d'ones:

$$\mathcal{F}G(t,\cdot)(\xi) = \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}.$$

Llei de la solució

Per simplificar, prenem $\sigma = \mathrm{Id}$. Aleshores,

$$\begin{aligned} u_i(t,x) =& \int_0^t \int_{\mathbb{R}^k} G(t-r, x-y) W^i(dr, dy) \\ \simeq& W^i(G(t-\cdot, x-*)), \end{aligned}$$

$i = 1, \ldots, d$.
La densitat d'$u(t,x)$ és

$$p_{t,x}(z) = \frac{1}{(2\pi \sigma_{t,x}^2)^{\frac{d}{2}}} \exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2\sigma_{t,x}^2} \right).$$

Càlcul de la variància

$$
\begin{aligned}
& u_i(t,x) \simeq W(G(t-\cdot, x-*)), \\
& \sigma^2_{t,x} := E\,(u_i(t,x))^2 \\
& = \int_{\mathbb{R}_+} ds \int_{\mathbb{R}^d} \mu(d\xi) \mathcal{F}G(t-s, x-*)(\xi) \overline{\mathcal{F}G(t-s, x-*)(\xi)} \\
& = \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^k} \frac{\sin^2(s|\xi|)}{|\xi|^2}\, \mu(d\xi).
\end{aligned}
$$

Teorema

I, J subconjunts compactes de $[t_0, T]$ i $\mathbb{R}^k$, respectivement (amb mesura de Lebesgue positiva); $N > 0$. Valen les afitacions següents:

1. Existeixen constants positives $c_i = c_i(I, J, N, \beta, k, d)$, i=1,2, tals que, per tot borelià $A \subset [-N, N]^d$,
$$c_1 \mathrm{Cap}_{d-\frac{2(k+1)}{2-\beta}}(A) \le P\{u(I \times J) \cap A \neq \emptyset\} \le c_2 \mathcal{H}_{d-\frac{2(k+1)}{2-\beta}}(A).$$
2. Per qualsevol $t \in I$, existeixen constants positives $c_i = c_i(J, N, \beta, k, d)$, i=1,2, tals que, per tot borelià $A \subset [-N, N]^d$,
$$c_1 \mathrm{Cap}_{d-\frac{2k}{2-\beta}}(A) \le P\{u(\{t\} \times J) \cap A \neq \emptyset\} \le c_2 \mathcal{H}_{d-\frac{2k}{2-\beta}}(A).$$
3. $\cdots$

Applicació

Quan $A = \{a\}$ és polar per u?

- Si A és *polar*, i.e. $P\{u(I \times J) \cap A \neq \emptyset\} = 0$, aleshores $d - \frac{2(k+1)}{2-\beta} \geq 0$.
- Si $d - \frac{2(k+1)}{2-\beta} > 0$, aleshores $\mathcal{H}_{d-\frac{2(k+1)}{2-\beta}}(A) = 0$; per tant A és *polar*.

Conjectura: A és *polar* $\Leftrightarrow d - \frac{2(k+1)}{2-\beta} \geq 0$.

Problemes relacionats

- Conjunts de nivell $\mathcal{L}(v; z) = \{x \in I : v(x) = z\}$, $z \in \mathbb{R}^m$.

$$\ldots \leq P\{\mathcal{L}(v; z) \cap E\} \leq \ldots, \quad E \subset I \text{ compacte.}$$

- Dimensió de Hausdorff de $v(I)$ (q.s.).

Cas general

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}(t,x) - \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}(t,x) = b_i(u(t,x)) + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}(u(t,x))\dot{W}^j(t,x),$$

$1 \le i \le d$, $t \in]0,T]$, $x \in \mathbb{R}^k$, $k \ge 2$,
condicions inicials nul.les,
$b_i, \sigma_{ij} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz contínues.

L'existència i propietats de la densitat es poden estudiar utilitzant el Càlcul de Malliavin:

- $k = 2$: *Millet, S.-S.*, 1999.
- $k = 3$: *Quer-Sardanyons, S.-S.*, 2004.
- *S.-S.*, 2005.

Flash

- La fórmula d'integració per parts del Càlcul de Malliavin
  $F:\Omega\to\mathbb{R}^m$, $G:\Omega\to\mathbb{R}$, $\alpha\in\{1,\ldots,m\}^k$, φ "regulars":

$$E\left[(\partial_\alpha\varphi)(F)G\right]=E\left[\varphi(F)H_{(\alpha)}(F,G)\right].$$

- Fórmula per la densitat
  Si la densitat d'F existeix, aleshores

$$\begin{aligned}p_F(y)&=P\{F=y\}\\&=E\left[\delta_{\{y\}}(F)\right]\\&=E\left[1_{\{F>y\}}H_{(1,2,\ldots,m)}(F,1)\right].\end{aligned}$$

Applicació

$$F = (u_1(s,y), \ldots, u_d(s,y), u_1(t,x), \ldots, u_d(t,x)),$$

$(s,y) \neq (t,x)$.

$$p_{t,x;s,y}(z_1, z_2) = E\left[1_{\{F>(z_1,z_2)\}} H_{(1,2,\ldots,m)}(F,1)\right].$$

- "Desigualtat exponencial per martingales"

$$P\left(F > (z_1, z_2)\right) \leq C \exp\left(\ldots\right).$$

- Anàlisi fi dels valors propis de la matriu de Malliavin

$$\left\| H_{(1,2,\ldots,m)}(F,1) \right\|_{L^p(\Omega)} \leq C \frac{1}{(|t-s| + \|x-y\|)^\gamma}.$$

Referències

- C. Mueller, R. Tribe (2002), *Hitting probabilities of the random string*. Elec. J. Probab. 7, 1-29.
- R. C. Dalang, E. Nualart (2004), *Potential theory for hyperbolic SPDEs*. Ann. Probab. **32**, 2099-2148.
- R. C. Dalang, D. Khoshnevisan, E. Nualart (2007), *Hitting probabilities for systems of non-linear stochastic heat equations with additive noise*. Latin Amer. J. Probab. Statist. (ALEA) **3**, 231-271.
- R. C. Dalang, D. Khoshnevisan, E. Nualart (2009), *Hitting probabilities for systems of non-linear stochastic heat equations with multiplicative noise*. Probab. Theory and Rel. Fields 144, 371-427.

Gràcies per la vostra atenció!